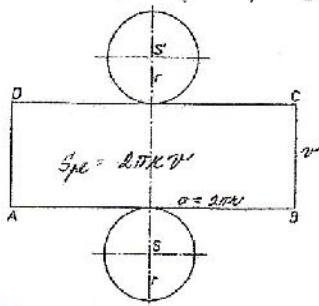
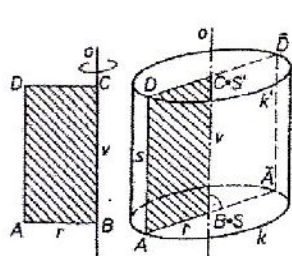


2. rotační tělesa

ROTAČNÍ TĚLESA - rotační tělesa vznikají rotací rovinných obrazců kolem dané přímky, tzv. osy rotačního tělesa

- ROTAČNÍ VÁLEC - rotací obdélníku kolem jedné jeho stran



r ... poloměr nálev
 v ... výška podstavy nálev
 S_p ... obsah podstavy nálev
 S_{pl} ... obsah pláště nálev

$$V = S_p \cdot v$$

$$V = \pi r^2 v$$

$$S = 2S_p + S_{pl}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$

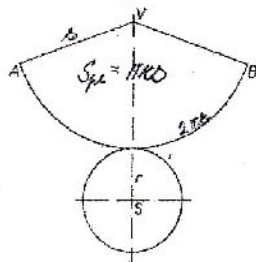
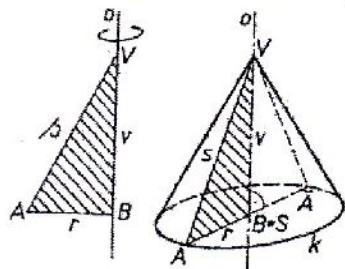
$$S = 2\pi r (r + v)$$

$$\begin{cases} S_{pl} = S_{\square} = v \cdot 2\pi r \\ S_p = 2\pi r \cdot r \end{cases}$$

- normostranný válec: $r = v$

- pro výpočet a úlohy rot. nálev
 je podstavou kužele nálev
 nebo úloha ($V = S_p \cdot v$)

- ROTAČNÍ KUŽEL - rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho stran



r ... poloměr
 v ... výška podstavy
 s ... délka strany kužele
 $s = \sqrt{r^2 + v^2}$

S_{pl} je část kužele nálev (část V ,
 poloměr s)

$$V = \frac{1}{3} S_p v$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

$$S = S_p + S_{pl}$$

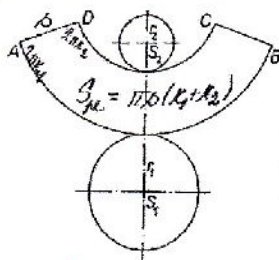
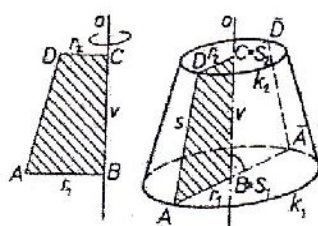
$$S = \pi r^2 + \pi r s$$

$$S = \pi r (r + s)$$

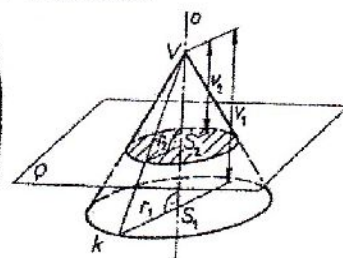
$$\begin{cases} S_{pl} = \frac{1}{2} s \cdot 2\pi r \\ S_p = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r \\ S_{pl} = \pi r s \end{cases}$$

- normostranný kužel:
 (osový řez - normostranný Δ ,
 $r = v$)

- KOLMÝ KUŽEL - rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem rovnoběžných stran



$$\begin{cases} S_{pl} = S_{\square} \\ S_{pl} = \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot 2\pi s \\ S_{pl} = \frac{2\pi r_1 + 2\pi r_2}{2} \cdot s \\ S_{pl} = (\pi r_1 + \pi r_2) s \\ S_{pl} = \pi s (r_1 + r_2) \end{cases}$$



$$V = \frac{1}{3} v (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$V = \frac{\pi}{3} (\pi r_1^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \pi r_2^2} + \pi r_2^2)$$

$$V = \frac{\pi}{3} (\pi r_1^2 + \pi r_1 r_2 + \pi r_2^2)$$

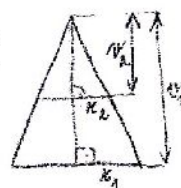
$$V = \frac{\pi v}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$$

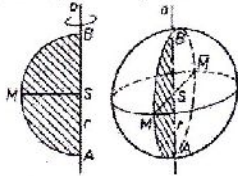
$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi (r_1 + r_2) s$$

κ podobnosti Δ

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{r_1}{r_2}$$



- **KOULE:** množinu rotací přímky kolem přímky obsahující pro průměr
- množinou všech bodů v prostoru E_3 , které mají od bodu S vzdálenost menší nebo rovnou vzdálenosti r ($X \in E_3; |SX| \leq r$)



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

s... střed koule
n... poloměr

d... průměr
 $d = 2r$

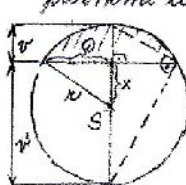
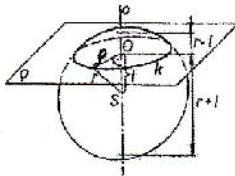
- **KULOVÁ PLOCHA:** hranice koule ($X \in E_3; |SX| = r$)

$$S = 4 \pi r^2$$

(čtyřnásobek obsahu kruhu)

- **KULOVÝ ÚSEČ:**

rotací kruhové úseče kolem její osy souměrnosti,
poloměru-li koule rovnou, množinou 2. KULOVÉ ÚSEČE



$$V = \frac{\pi r^2}{6} (3\varphi^2 + \psi^2) = \pi \varphi^2 \frac{h}{3} + \frac{\pi}{3} \left(\frac{h}{3} \right)^3$$

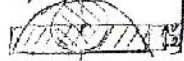
n... výška
φ... poloměr
podstavy

$$k = r - r \cos \varphi$$

výška náleží
a poloměr φ a výšku h

$$\text{nebo } V = \frac{2}{3} \pi r^2 (3r - h)$$

výška koule a poloměr náleží
pro výpočty



- **KULOVÝ VRCHLÍK:** část kulové plochy
množinou její libovolných kružnic

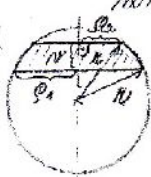
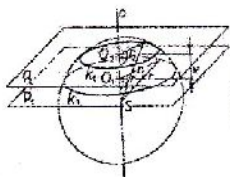
$$S = 2 \pi r h = \pi (\varphi^2 + \psi^2)$$

$$S = \pi \varphi^2 + 2 \pi r h$$

obsah kruhu
oblast kruhu

- **POLOKOULE:** $h = r$

- **KULOVÁ VRSTVA:** množinu rotací a koule (poloměru-li koule k normálnímu průměru,
množinou 2. kulové úseče a 1. KULOVÉ VRSTVA)



$$V = \frac{\pi r^2}{6} (3\varphi_1^2 + 3\varphi_2^2 + \psi^2)$$

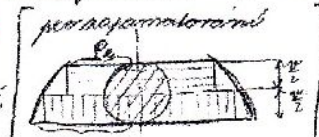
φ1, φ2... poloměry podstavy r1, r2 výška malá

$$V = \pi \varphi_1^2 \frac{h}{3} + \pi \varphi_2^2 \frac{h}{3} + \frac{\pi}{3} \left(\frac{h}{3} \right)^3$$

V... výška
a poloměr φ1
a výšku h

V... výška
a poloměr φ2
a výšku h

V... výška
a poloměr φ
a výšku h



- **KULOVÝ PÁŠ:**

část kulové plochy omezená 2 kružnicemi

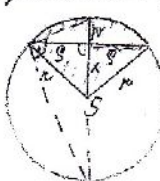
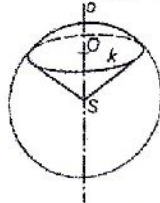
$$S = 2 \pi r h$$

(pro nechtě)

nechtě

$$S = \pi \varphi_1^2 + \pi \varphi_2^2 + 2 \pi r h$$

- **KULOVÁ VÝSEČ:** sjednocení kulové úseče a rotačního kužele, který má s kulovou
úsečí společnou podstavu a jeho vrchol je středem koule

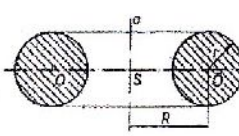
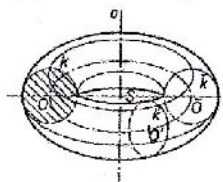
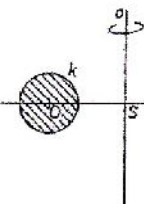


$$V = \frac{\pi r^2}{6} (3\varphi^2 + \psi^2) + \frac{\pi \varphi^2 (r - h)}{3} = \frac{2 \pi r^2 h}{3}$$

h... výška
r... poloměr
[n... kul. náleží a výšku φ² = r² (2r - h)]

$$S = \pi r (2r + h)$$

- **ANULOID** (**TORUS** příp. **TOROID**): množinu rotací kruhu kolem přímky, která leží
v rovině tohoto kruhu a tento kruh nepřesírá
- např. gumový pevnost na posilování těla, hranice f. např. dvou pružností auta

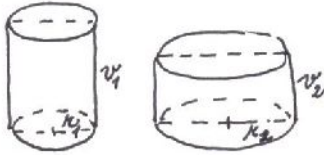


$$V = 2 \pi^2 R r^2$$

$$S = 4 \pi^2 R r$$

Příklady

- ① Dva rotační válce mají výšky 64 cm a 27 cm. Plošná každého k nich má stejný obsah jako podstava druhého válce. V jakém poměru jsou objemy válců.



$$v_1 = 64 \text{ cm}$$

$$v_2 = 27 \text{ cm}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 v_1}{\pi r_2^2 v_2} = \frac{r_1^2 v_1}{r_2^2 v_2} \quad \text{dos. (2), (**)}$$

$$= \frac{2 r_1^2 v_1}{2 r_1^2 v_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$S_{p1} = S_{p2}$$

$$2\pi r_1 v_1 = \pi r_2^2$$

$$2r_1 v_1 = r_2^2 \quad (*)$$

$$r_1 = \frac{r_2^2}{2v_1}$$

$$S_{p2} = S_{p1}$$

$$2\pi r_2 v_2 = \pi r_1^2$$

$$2r_2 v_2 = r_1^2 \quad (**)$$

$$2r_2 v_2 = \left(\frac{r_2^2}{2v_1}\right)^2$$

$$2r_2 v_2 = \frac{r_2^4}{4v_1^2}$$

$$2v_2 = \frac{r_2^3}{4v_1^2}$$

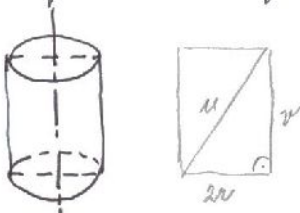
$$r_2^3 = 8v_1^2 v_2 = 8 \cdot 64^2 \cdot 27$$

$$r_2^3 = 884736 \Rightarrow r_2 = 96 \text{ cm} \Rightarrow r_1 = \frac{96^2}{2 \cdot 64} = 72 \text{ cm}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{96}{72} = \frac{4}{3} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\left[\text{nebo } \frac{V_2}{V_1} = \dots = \frac{3}{4} \right]$$

- ② Druhý řez nádoby tvaru rotačního válce je obdélník s úhlopříčkou délky $u = 39 \text{ cm}$. Poměr obsahů plochy a obsahu podstavy je 5:3. Kolik litrů se vejde do nádoby?



$$u = 39 \text{ cm}$$

$$S_{pl} : S_{p} = 5 : 3$$

$$V = ? \text{ l (dm}^3\text{)}$$

$$\text{mjr. } (r, v) \text{ k p. r.}$$

$$u^2 = (2r)^2 + v^2$$

$$39^2 = 4r^2 + \frac{25r^2}{36}$$

$$1521 \cdot 36 = 144r^2 + 25r^2$$

$$54756 = 169r^2$$

$$r^2 = 324$$

$$r = 18 \text{ cm}$$

$$S_{pl} : S_{p} = 5 : 3$$

$$\frac{S_{pl}}{S_{p}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2\pi r v}{\pi r^2} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2v}{r} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2v}{18} = \frac{5}{3}$$

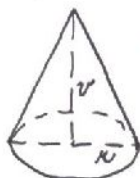
$$v = \frac{5 \cdot 18}{6} = 15 \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 v \quad (\text{mjr. } r, v \text{ (2)})$$

$$V = \pi \cdot 18^2 \cdot 15 \text{ cm}^3$$

$$V = 15268 \text{ cm}^3 = 15,3 \text{ dm}^3 (\text{l})$$

- ③ Hromada písku má tvar rotačního kužele s výškou 3,30 m a obvodem podstavy 18,85 m. Kolik m³ písku je v hromadě?



$$r = 3,30 \text{ m}$$

$$o = 18,85 \text{ m}$$

$$V = ? \text{ m}^3$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v \rightarrow \textcircled{a} \quad o = 2\pi r$$

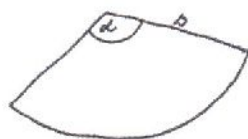
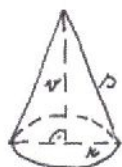
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 3,30$$

$$V = 31,1 \text{ m}^3$$

$$2\pi r = 18,85$$

$$r = \frac{18,85}{2\pi} = 3 \text{ m}$$

- ④ Rozvineme-li plášť rotačního kužele, jehož obsah $S_{\mu} = 18\pi \text{ cm}^2$ do roviny, dostaneme koutovou úseč se středovým úhlem 120° . Vypočítejte objem kužele.



$$\begin{aligned} S_{\mu} &= 18\pi \text{ cm}^2 \\ \alpha &= 120^\circ \\ V &= ? \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\left[S_{\text{úseči}} = \frac{\pi s^2}{360^\circ} \cdot \alpha \quad \text{ALE ZDE } \alpha = 120^\circ \right]$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 s$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3}$$

$$V = 8\pi\sqrt{3}$$

$$V = 43,5$$

poč.

$$K. P. V. \quad s^2 = s^2 - r^2$$

$$s^2 = 9 \cdot 6 - 6$$

$$s^2 = 48$$

$$s = \sqrt{48}$$

$$s = 4\sqrt{3}$$

$$S_{\mu} = \pi r s$$

$$18\pi = \pi r s$$

$$18 = r s$$

$$18 = r \cdot 3r$$

$$18 = 3r^2$$

$$r^2 = 6$$

$$r = \sqrt{6}$$

$$s = 3r = 3\sqrt{6}$$

$$S = \frac{\pi s^2}{360^\circ} \cdot 120^\circ$$

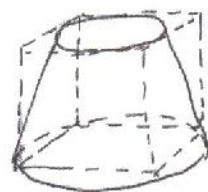
$$S_{\text{úseči}} = \frac{\pi s^2}{3}$$

$$S_{\text{úseči}} = \frac{\pi s^2}{3}$$

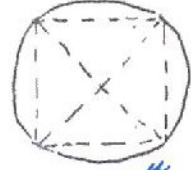
$$\pi r s = \frac{\pi s^2}{3}$$

$$3r = s$$

- ⑤ Určete objem a povrch komolého kužele, jehož podstavy jsou kruhy opsané čtverci a vepsaný protějšími stranami kruhu s hranou délky $a = 4 \text{ cm}$.



dolní podstava



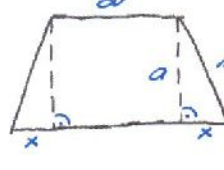
$$r_1 = \frac{a}{2}$$

horní podstava



$$r_2 = \frac{a}{2}$$

průřez



$$x = \frac{a-a}{2}$$

$$x = \frac{4\sqrt{2}-2}{2}$$

$$x = 2\sqrt{2}-1$$

$$x = 0,83 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (\pi r_1^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2} + \pi r_2^2)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \pi (r_1^2 + \sqrt{r_1^2 \cdot r_2^2} + r_2^2)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 (8 + \sqrt{8 \cdot 4} + 4)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi (12 + 4\sqrt{2})$$

$$V = 43,96$$

$$V = 44 \text{ cm}^3$$

$$S = S_1 + S_2 + S_{\mu}$$

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + (r_1 + r_2) \cdot \pi \cdot s$$

$$S = \pi (r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2) \cdot s)$$

$$S = \pi (2,83^2 + 2^2 + 4,83 \cdot 4,1)$$

$$S = 99,89 \text{ cm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$u^2 = a^2 + a^2$$

$$u^2 = 2a^2$$

$$u = a\sqrt{2}$$

$$r_1 = \frac{a}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$r_1 = 2\sqrt{2}$$

$$r_1 = 2,83 \text{ cm}$$

$$r_2 = \frac{a}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$$

$$r_2 = 2 \text{ cm}$$

$$r = a = 4 \text{ cm}$$

$$\textcircled{b} \text{ K. P. V.}$$

$$s^2 = a^2 + x^2$$

$$s^2 = 16 + 0,83^2$$

$$s = \sqrt{16,6889}$$

$$s = 4,1 \text{ cm}$$

- ⑥ Plošina koule o poloměru $\kappa = 15 \text{ cm}$ byla rozdělena na 3 části v poměru 2:3:5 a každá část byla ulita novou koule. Vypočítejte poloměry těchto koulí.

$$V = \frac{4}{3}\pi\kappa^3 \quad V_1:V_2:V_3 = 2:3:5 \quad V_1 = \frac{4}{3}\pi\kappa_1^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 \quad \text{1. zp.} \quad 10 \text{ dílů} \dots V \quad V_1 = 2 \cdot 1413,72 = 2827,44$$

$$V = 14137,2 \text{ cm}^3 \quad 1 \text{ díl } \frac{V}{10} = 1413,72 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi\kappa_1^3 = 2827,44$$

$$\Rightarrow \kappa_1 = 8,77 \text{ cm}$$

$$\text{2. zp.} \quad V_1 = \frac{2V}{10} = \frac{V}{5} \quad V_2 = \frac{3V}{10} \quad V_3 = \frac{5V}{10} = \frac{V}{2}$$

$$\frac{4}{3}\pi\kappa_1^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{\kappa^3}{5} \quad \kappa_1^3 = \frac{\kappa^3}{5} \quad \kappa_1 = \frac{\kappa}{\sqrt[3]{5}} \quad \kappa_1 = \frac{15}{\sqrt[3]{5}} = 8,77 \text{ cm}$$

$$\kappa_2^3 = \frac{3}{10}\kappa^3 \quad \kappa_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{10}}\kappa \quad \kappa_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{10}} \cdot 15 = 10,04 \text{ cm}$$

$$\kappa_3^3 = \frac{1}{2}\kappa^3 \quad \kappa_3 = \frac{\kappa}{\sqrt[3]{2}} \quad \kappa_3 = \frac{15}{\sqrt[3]{2}} = 11,91 \text{ cm}$$

- ⑦ Ke třem kovovým koulím o poloměrech $\kappa_1 = 3 \text{ cm}$, $\kappa_2 = 4 \text{ cm}$ a $\kappa_3 = 5 \text{ cm}$ byla ulita jediná koule. Určete její povrch.

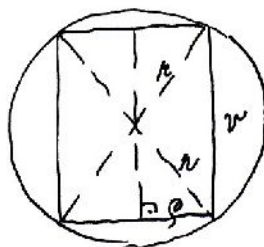
$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\kappa_1^3 \quad V = V_1 + V_2 + V_3 \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad S = 4\pi r^2$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi\kappa_2^3 \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\kappa_1^3 + \frac{4}{3}\pi\kappa_2^3 + \frac{4}{3}\pi\kappa_3^3 \quad S = 4\pi \cdot 6^2$$

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi\kappa_3^3 \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\kappa_1^3 + \kappa_2^3 + \kappa_3^3) \quad S = 452,16 \text{ cm}^2$$

$$r = \sqrt[3]{\kappa_1^3 + \kappa_2^3 + \kappa_3^3} \quad r = \sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3} = \sqrt[3]{27 + 64 + 125} = \sqrt[3]{216} = 6 \text{ cm}$$

- ⑧ Do kulové plochy je vepsán rotační válec (kulová plocha prochází podstavičnými hranami válce). Poloměr podstavy válce je o 2 cm a výška o 1 cm menší než poloměr koule. Určete poloměr koule, její objem a povrch.



q ... poloměr válce $q = \kappa - 2$
 κ ... poloměr koule $r = \kappa - 1$
 r ... výška válce

$$(2\kappa)^2 = r^2 + (2q)^2$$

$$4\kappa^2 = r^2 + 4q^2$$

$$4\kappa^2 = (\kappa - 1)^2 + 4(\kappa - 2)^2$$

$$4\kappa^2 = \kappa^2 - 2\kappa + 1 + 4(\kappa^2 - 4\kappa + 4)$$

$$4\kappa^2 = \kappa^2 - 2\kappa + 1 + 4\kappa^2 - 16\kappa + 16$$

$$0 = \kappa^2 - 18\kappa + 17$$

$$0 = (\kappa - 17)(\kappa - 1)$$

$$\kappa_1 = 17 \text{ cm} \quad \kappa_2 = 1 \text{ cm nepř. (záporný)}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\kappa^3$$

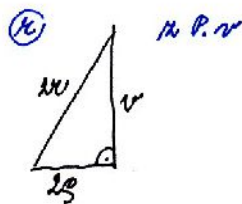
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 17^3$$

$$V = 20579,5 \text{ cm}^3$$

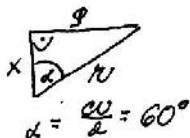
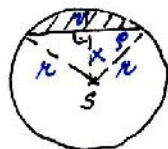
$$S = 4\pi r^2$$

$$S = 4\pi \cdot 17^2$$

$$S = 3631,7 \text{ cm}^2$$



- 9) Vrchol (povrch) vrcholu přímého kužele s úhlem $\alpha = 120^\circ$, její poloměr kruhové hrany $\rho = 10 \text{ cm}$. VRCHLÍK



$S = 2\pi\rho v$ jako plocha nálezu o poloměru ρ a výšce v

pol. úhel $\alpha, v \rightarrow$

1) $\triangle KRA$

$$\sin \alpha = \frac{\rho}{\rho}$$

$$\rho \sin \alpha = \rho$$

$$\rho = \frac{\rho}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin 60^\circ}$$

$$\rho = 11,55 \text{ cm}$$

$$S = 2\pi\rho v$$

$$S = 2\pi \cdot 11,55 \cdot 5,77$$

$$S = 419 \text{ cm}^2$$

2) $\rho = \rho - x$

pol. úhel x

$\triangle KRA$

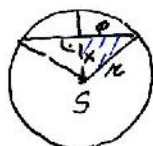
$$\sin x = \frac{\rho}{\rho}$$

$$x = \frac{\rho}{\sin x}$$

$$x = \frac{10}{\sin 60^\circ}$$

$$x = 5,77 \text{ cm}$$

- 10) Objem kužele úseč je $45\pi \text{ cm}^3$, její výška 3 cm. Vypočítej povrch úseče. ÚSEČ



$$v = 3 \text{ cm}$$

$$V = 45\pi \text{ cm}^3$$

$$S = ? \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi v}{6} (3\rho^2 + r^2)$$

$$45\pi = \frac{\pi \cdot 3}{6} (3\rho^2 + 3^2) \cdot 1,6$$

$$15 \cdot 6 = 3\rho^2 + 9$$

$$3\rho^2 = 81$$

$$\rho^2 = 27$$

$$\rho = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

3) $\triangle KRA$ Pyth. v.

$$\rho^2 = x^2 + v^2 \quad x = \rho - r$$

$$\rho^2 = (\rho - r)^2 + v^2$$

$$\rho^2 = \rho^2 - 2\rho r + r^2 + v^2$$

$$2\rho r = r^2 + v^2$$

$$\rho = \frac{r^2 + v^2}{2r} = \frac{9 + 27}{2 \cdot 3}$$

$$\rho = \frac{36}{6} = 6 \text{ cm}$$

$$S = S_1 + S_2$$

úseč $\rightarrow$ vrcholu

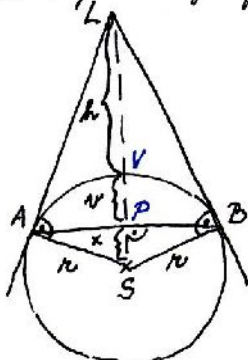
$$S = \pi\rho^2 + 2\pi\rho v$$

$$S = \pi \cdot 27 + 2\pi \cdot 6 \cdot 3$$

$$S = (36 + 27)\pi$$

$$S = 63\pi \text{ cm}^2$$

- 11) Z jaké výšky vidí lidé povrch kuličky o poloměru $\rho = 200\,000 \text{ km}$ a $\rho = 6378 \text{ km}$. DELTOID + VRCHLÍK



$$h = |LV|$$

$$r = |PV|$$

ASBL deltoide ($LS \perp AB$, AB příčna LS) $\triangle KRA$ vedeme sičny

vrcholu S

$$S = 2\pi\rho v$$

$$S = 200\,000 \text{ km}^2$$

$$\rho = 6378 \text{ km}$$

$$h = ? \text{ km}$$

$$S = 2\pi\rho v$$

$$v = \frac{S}{2\pi\rho}$$

$$v = \frac{200\,000}{2\pi \cdot 6378}$$

$$v = 4,99 \text{ km}$$

$$= 5 \text{ km}$$

$\triangle KRA$ Pyth. v. Eukl. v. α odvrh

$$(h^2 = c^2 - a^2)$$

$$\rho^2 = (\rho + h)x$$

$$\rho^2 = \rho x + h x$$

$$h x = \rho^2 - \rho x$$

$$h = \frac{\rho^2 - \rho x}{x}$$

$$h = \frac{6378^2 - 6378 \cdot 6373}{6373}$$

$$h = 5 \text{ km}$$

